Тема лекции № 14. Модель с растянутой поставкой. Модель с допущением дефицита.

Цель лекции: Рассмотреть модель с растянутой поставкой, характеристику оптимальной стратегии.

Рассмотрим детерминированную модель с растянутой поставкой, постоянной интенсивностью спроса и отсутствием дефицита. Пополнение запаса в такой модели происходит не мгновенно и занимает некоторое время, которым нельзя пренебречь и считать его равным 0. График динамики запасов изображен на рисунке 41. Так, например, происходит пополнение внутрипроизводственных запасов, производимых на самом предприятии. Некоторый промежуток времени T* продукция интенсивно производится и поставляется на склад (но в то же время и потребляется на предприятии). Далее в течение промежутка T** на оборудовании производится другая продукция, запас первой продукции не пополняется, он только потребляется. Через время T = T*+T** (цикл управления) на предприятии снова приступают к производству первой продукции и пополнению ее запасов.

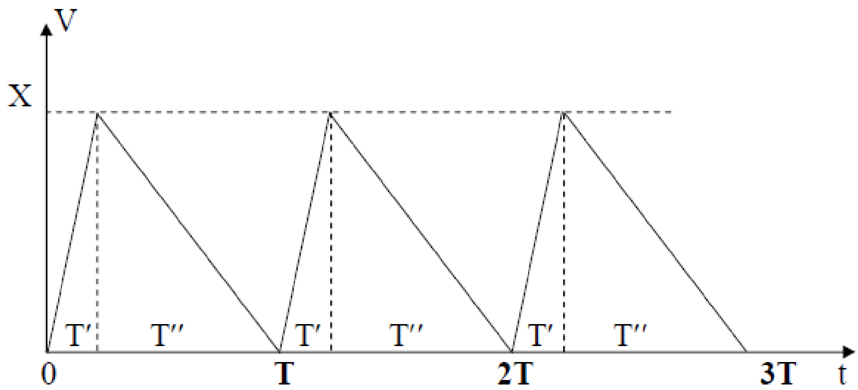

Рисунок 41. Динамика складского запаса в модели с растянутой поставкой

Постоянные затраты в такой ситуации связаны с переналадкой оборудования для запуска в производство партии изделий. Переменные затраты, как обычно, связаны с хранением. Все время продукция потребляется с постоянной интенсивностью α. Обозначим посредством β интенсивность поставки, то есть объем поставки в единицу времени. Таким образом, реальная скорость пополнения склада в периоде T* равна $\beta - \alpha$. Эта разность определяет угол наклона прямой на промежутке T*. На промежутке T**угол наклона определяется величиной α.

Параметры бездефицитной модели с растянутой поставкой

α – объем спроса в единицу времени (интенсивность спроса);
a – фиксированные издержки, связанные с актом пополнения запаса;
b – издержки по хранению единицы запаса в течение единицы времени;
β – объем поставки в единицу времени (интенсивность поставки).

Характеристики модели

T – длина цикла управления запасами; T* – интервал поставки (время, в течение которого поступает партия); T** – интервал отсутствия поставки;

Q – размер партии; X – максимальный объем запаса на складе; L – средние издержки в единицу времени без учета стоимости партии; $\overline{L}$ – средние издержки в единицу времени с учетом стоимости пар-
тии.

Связи между характеристиками модели:

$$T = Q/\alpha, \qquad Q = \alpha T, \qquad X = (\beta - \alpha)T',$$

$$T' = X/(\beta - \alpha), \qquad X = \alpha T'', \qquad T'' = X/\alpha,$$

$$T = T' + T'' = X/(\beta - \alpha) + X/\alpha = X/(\alpha/(1 - \alpha/\beta)),$$

$$Q = \alpha T = X + \alpha T' = X/(1 - \alpha/\beta), \quad X = Q(1 - \alpha/\beta), \quad X = T\alpha(1 - \alpha/\beta),$$

$$L = (a + bXT/2)/T = (a + b\alpha(1 - \alpha/\beta)T^2/2)/T = a/T + b\alpha(1 - \alpha/\beta)T/2 = a\alpha/Q + b(1 - \alpha/\beta)Q/2, \qquad \overline{L} = L + c\alpha.$$

Характеристики оптимальной стратегии

Оптимальная стратегия определяется теми значениями характеристик T^*, T'^*, T''^*, Q^*, X^*, L^* и $\overline{L}^*$, при которых издержки L становятся минимальными. Достаточно найти одну из этих характеристик, остальные определятся через нее однозначно на основе приведенных
выше соотношений.

Оптимизационные формулы:

$$T^* = (2a/(\alpha b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5},$$

$$T'^* = (2a\alpha/(\beta^2 b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}, \qquad T''^* = (2a(1 - \alpha/\beta)/\alpha b)^{0,5},$$

$$Q^* = (2a\alpha/(b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}, \qquad X^* = (2a\alpha(1 - \alpha/\beta)/b)^{0,5},$$

$$L^* = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta))^{0,5}, \qquad \overline{L}^* = L^* + c\alpha = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta))^{0,5} + c\alpha.$$

В оптимизационных формулах присутствует величина $1 - \alpha/\beta$. Отношение α/β сопоставляет интенсивность спроса с интенсивностью поставки. Рост интенсивности поставки в пределе приводит к ситуации мгновенной поставки. Оптимизационные формулы для нашей модели в пределе, при $\alpha/\beta \to 0$, переходят в формулы для рассмотренной выше простейшей модели с мгновенной поставкой. При этом, в частности, становится:

$$Q^* = X^*, \quad T''^* = T, \quad T'^* = 0.$$

Модель с допущением дефицита. Рассмотрим детерминированную модель с мгновенной поставкой, постоянной интенсивностью спроса и допущением дефицита – допущением отложенного спроса. График динамики запасов изображен на рисунке 42.

В течение промежутка времени T1 спрос на продукцию удовлетворяется за счет имеющегося запаса. Далее в течение промежутка T2 запас отсутствует, возникает ситуация дефицита, постепенно накапливается долг величины S по неудовлетворенному спросу. Этот долг удовлетворяется за счет части поступившей партии Q, после чего на складе остается запас X, и все возобновляется по циклу. Длина цикла T= T1+T2. Штраф за дефицит исчисляется на основе коэффициента g – издержек за единицу объема дефицита в единицу времени.

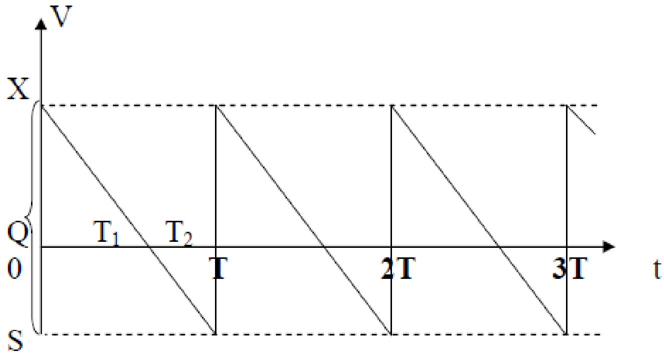

Рисунок 42. Динамика складского запаса в модели с допущением дефицита

Параметры модели с мгновенной поставкой и допущением дефицита

α – объем спроса в единицу времени (интенсивность спроса);

a – фиксированные издержки, связанные с актом пополнения запаса;

b – издержки по хранению единицы запаса в течение единицы времени;

g – величина издержек за единицу дефицита в течение единицы времени.

Характеристики модели

T – длина цикла управления запасами; T1 – интервал удовлетворения спроса (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита); T2 – интервал учета спроса (интервал отсутствия запаса и наличия дефицита); Q – размер партии;

X – максимальный объем запаса на складе; S – максимальный объем дефицита;

L – средние издержки в единицу времени без учета стоимости партии;

$\bar{L}$ – средние издержки в единицу времени с учетом стоимости партии.

Связи между характеристиками модели

$$T = T_1 + T_2, \qquad Q = X + S, \qquad Q = \alpha T,$$

$$T = Q/\alpha, \qquad T_1 = X/\alpha, \qquad T_2 = S/\alpha,$$

$$X = \alpha T_1, \qquad S = \alpha T_2,$$

$$L = (a + bXT_1/2 + gST_2/2)/T = (a + b\alpha T_1^2/2 + g\alpha T_2^2/2)/(T_1 + T_2),$$

$$\bar{L} = L + c\alpha.$$

Характеристики оптимальной стратеги. Оптимальная стратегия определяется теми значениями характеристик T* , T1* , T2* , Q* , X* , S*, при которых издержки L становятся минимальными. Достаточно найти дополняющую пару этих характеристик, например, T1* и T2*, или, например, X* и S*, остальные определятся через них однозначно на основе приведенных выше соотношений.

Оптимизационные формулы

$$T^* = (2a(1 + b/g)/(\alpha b))^{0,5}, \qquad T_1^* = (2a/(\alpha b(1 + b/g)))^{0,5},$$

$$T_2^* = (2ab/(\alpha g^2(1 + b/g)))^{0,5},$$

$$Q^* = (2a\alpha(1 + b/g)/b)^{0,5},$$

$$X^* = (2a\alpha/(b(1 + b/g)))^{0,5}, \qquad S^* = (2a\alpha b/(g^2(1 + b/g)))^{0,5},$$

$$bX^* = gS^*,$$

$$L^* = (2a\alpha b/(1 + b/g))^{0,5}, \qquad L^* = L^* + c\alpha = (2a\alpha b/(1 + b/g))^{0,5} + c\alpha.$$

В оптимизационных формулах присутствует величина $1 + b/g$. Обратная ей величина, $1 / (1 + b/g))$, называется *плотностью убытков из-за дефицита*. Отношение b/g сопоставляет затраты по хранению и по дефициту. Рост штрафа за дефицит в пределе приводит к запрету дефицита ввиду его абсолютной невыгодности. Оптимизационные формулы для нашей модели в пределе, при $b/g \to 0$, переходят в формулы для рассмотренной выше простейшей модели без дефицита. При этом, в частности, становится:

$$Q^* = X^*, \qquad S^* = 0, \qquad T_1^* = T, \qquad T_2^* = 0.$$

Контрольные вопросы:

1.Описать модель с растянутой поставкой

2.Объясните динамику складского запаса в модели с растянутой поставкой

3. Описать модель с допущением дефицита

4. Объясните динамику складского запаса в модели с допущением дефицита

Литература:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, Изд. "Высшая школа" 1986.

2. Бурков В.Н., Кулжабаев Н.М. Активные системы и деловые игры– Алматы:2000.

3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

4.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва: Наука, 1988

5.Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование, Изд. "Наука". Москва 1967.

6.Кулжабаев Н.М. Исследование операции. Учебное пособие. –Алматы:РИК КАО имени И.Алтынсарина,1999.

7.Кулжабаев Н.М. Муханова Г.С. Системный анализ и исследование операции.